



OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

Etapa locală – Constanța, 17.02.2019

Clasa a VII-a

Barem de corectare și notare

SUBIECTUL 1

a) Demonstrați că $\frac{k}{n(n+k)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+k}$, $\forall n, k \in \mathbb{N}$.

b) Se dau numerele $a = \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{2}{3 \cdot 5} + \frac{3}{5 \cdot 8} + \frac{4}{8 \cdot 12} + \frac{5}{12 \cdot 17} + \frac{6}{17 \cdot 23} + \frac{7}{23 \cdot 30}$ și

$b = 3 + 8 + 13 + \dots + 10018$. Calculați partea întregă a numărului $\sqrt{15 \cdot a + \frac{b}{1002}}$.

a) Calcul direct1p
b)

$a = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{23} - \frac{1}{30}$ 1p

$a = \frac{7}{15}$ 1p

$b = 3 + 8 + 13 + \dots + 10018 = (10018 + 3) \cdot \left[\frac{(10018 - 3) : 5 + 1}{2} \right] = 10021 \cdot 1002$ 2p

$\sqrt{15 \cdot a + \frac{b}{1002}} = \sqrt{15 \cdot \frac{7}{15} + \frac{10021 \cdot 1002}{1002}} = \sqrt{10028}$ 1p

$\left[\sqrt{10028} \right] = 100$ 1p

SUBIECTUL 2

a) Arătați că pentru orice $x \in \mathbb{N}$ care nu este multiplu de 3, restul împărțirii lui x^2 la 3 este egal cu 1.

b) Demonstrați că $a = \sqrt{2018^{2020} + 2020^{2018} + 2019}$ este irațional.

$x = 3k + 1$ sau $x = 3k - 1$ 1p

a) $x^2 = (3k \pm 1)^2 = M_3 + 1$ 1p

$r = 1$ 1p

$$2018^{2020} + 2020^{2018} + 2019 =$$

b) $(3 \cdot 673 - 1)^{2020} + (3 \cdot 673 + 1)^{2020} + 3 \cdot 673 \dots \dots \dots 2p$

$$= M_3 + 1 + M_3 + 1 + M_3 = M_3 + 2 \dots \dots \dots 1p$$

$$a = \sqrt{M_3 + 2} \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \dots \dots \dots 1p$$

SUBIECTUL 3

Se consideră un triunghi ascuțitunghic ABC și fie D piciorul înălțimii din A pe BC . Se duce $DE \perp AC$, $E \in AC$ și fie F un punct pe segmentul (DE) astfel încât $AF \perp BE$.

Arătați că $\frac{DF}{EF} = \frac{CD}{BD}$.

$$DG \parallel BE, G \in AC \dots \dots \dots 1p$$

$$AF \perp BE \Rightarrow AF \perp DG; DE \perp AG \Rightarrow F \text{ ortocentrul } \triangle ADG \dots \dots \dots 2p$$

$$GF \perp AD \text{ și } AD \perp BC \Rightarrow FG \parallel BC \dots \dots \dots 1p$$

$$\text{Teorema lui Thales } \triangle ECD \Rightarrow FG \parallel DC \Rightarrow \frac{DF}{EF} = \frac{CG}{GE} \dots \dots \dots 1p$$

$$\text{Teorema lui Thales } \triangle CBE \Rightarrow DG \parallel BE \Rightarrow \frac{CD}{BD} = \frac{CG}{GE} \dots \dots \dots 1p$$

$$\Rightarrow \frac{DF}{EF} = \frac{CD}{BD} \dots \dots \dots 1p$$

SUBIECTUL 4

Fie ABC un triunghi echilateral, $M \in AC$ astfel încât $\frac{AM}{AC} = \frac{2}{3}$ și N simetricul lui M față de BC . Dreapta NC intersectează paralela prin A la BC în T , iar TM intersectează BC în O și pe AB în Q .

- a) Demonstrați că $ABCT$ este romb.
- b) Arătați că BO este linie mijlocie în triunghiul ATQ .

Gazeta Matematică 1/2013.

a)

$$\triangle MCN \text{ isoscel} \Rightarrow m(\sphericalangle MCS) = m(\sphericalangle SCN) = 60^\circ \dots \dots \dots 1p$$

$$m(\sphericalangle MCT) = 180^\circ - [m(\sphericalangle MCS) + m(\sphericalangle SCN)] = 60^\circ \dots \dots \dots 1p$$

$$m(\sphericalangle MCT) = m(\sphericalangle BAC) \text{ alterne interne} \Rightarrow AB \parallel CT \dots \dots \dots 1p$$

$$\text{din ipoteză } AT \parallel BC, BC \equiv AB \Rightarrow ABCT \text{ romb} \dots \dots \dots 1p$$

b)

$$DC \parallel AT \xrightarrow{T.F.A} \triangle AMT \approx \triangle CMO \Rightarrow \frac{AT}{OC} = \frac{AM}{MC} = \frac{2}{1} \dots \dots \dots 1p$$

$$AT = BC \Rightarrow AT = 2 \cdot OC, BC = 2 \cdot OC \Rightarrow O \text{ mijlocul lui } BC \dots \dots \dots 1p$$

$$\text{finalizare} \dots \dots \dots 1p$$

Notă : Orice altă soluție corectă, diferită de cea din barem, va primi punctaj maxim.